

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
E.T.S. DE INGENIERÍA INFORMÁTICA



Departamento de Ciencias de la Computación  
e Inteligencia Artificial

# Teoría de Algoritmos

## Guión de Prácticas

Curso 2003-04

Ingeniería Técnica en Informática de Gestión  
Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas

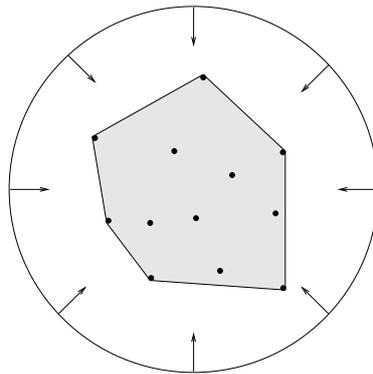
## 1.1. Técnica Divide y Vencerás

El objetivo de la práctica es que el alumno comprenda y asimile el funcionamiento de la técnica de diseño de algoritmos “Divide y Vencerás”. Para ello se propone un problema que debe resolverse.

### 1.1.1. Envolverte convexa

La envolvente convexa de un conjunto de puntos  $Q$  es el polígono convexo  $P$  más pequeño tal que cualquier punto de  $Q$  está en el borde de  $P$  o en su interior.

De manera intuitiva podemos considerar cada punto de  $Q$  como una puntilla clavada en una tabla. La envolvente convexa del conjunto de puntos es la forma que adopta una banda elástica que rodeara las puntillas una vez que la soltáramos.



Nuestro problema consiste en encontrar la secuencia de puntos de  $Q$  que forma los vértices de la envolvente convexa.

Una primera aproximación al problema puede llevarnos a obtener un “algoritmo específico” que descarta los puntos que son interiores a la envolvente convexa. Para ello compara cada punto con el triángulo formado por cualquier trio de puntos y lo descarta si se encuentra en su interior.

Veremos que este problema también se puede abordar considerando la técnica del Divide y Vencerás.

### 1.1.2. Algoritmo Divide y Vencerás

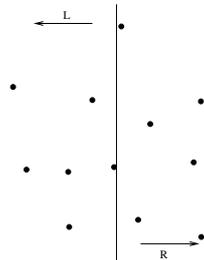
Para establecer un algoritmo Divide y Vencerás que encuentre una solución al problema debemos:

1. Dividir el problema original en subproblemas más pequeños que serán resueltos de manera independiente.

2. Establecer un tamaño mínimo de problema para el que conocemos la solución o bien ésta se puede obtener fácilmente.
3. Combinar las soluciones obtenidas de los subproblemas para obtener la solución al problema.

### Dividir

Para dividir el problema en subproblemas más simples distribuiremos los puntos de  $Q$  en dos subconjuntos  $L$  y  $R$  tales que la coordenada  $x$  de cualquier punto de  $L$  es menor o igual a la coordenada  $x$  de todos los puntos de  $R$ .



Supondremos que los puntos de  $Q$  estarán en un vector ordenados por la componente  $x$  y que ésta no se repite. Gracias a esto la división de  $Q$  en los subconjuntos  $L$  y  $R$  es tan fácil como dividir el vector por la mitad.

### Caso base

El principal problema de encontrar la envolvente convexa de un conjunto de puntos es determinar qué puntos son interiores, es decir, no están en la periferia formando parte de la envolvente sino que están en el interior del polígono.

Para que un punto esté en el interior de la envolvente convexa hace falta que dicha envolvente convexa “tenga interior”, es decir, la envolvente convexa debe formar un plano (en una recta no hay interior). El mínimo número de puntos necesario para formar un plano es tres. Por tanto, si el conjunto  $Q$  tiene tres o menos puntos la solución es fácil: todos los puntos forman parte de la envolvente convexa.

### Combinar

La combinación de las soluciones de los subconjuntos  $L$  y  $R$  es la parte más complicada del proceso. Para mezclar las envolventes obtenidas en los subproblemas es necesario unir las utilizando las tangentes comunes más altas y más bajas.

Una recta  $y = ax + b$  es una tangente inferior (superior) a un polígono si para todo vértice  $V = (v_x, v_y)$  del polígono se verifica que  $av_x + b \leq v_y$  ( $av_x + b \geq v_y$ ). La tangente a un polígono pasará por al menos uno de sus vértices. Si el polígono es convexo y la recta pasa por el vértice  $V$  entonces será tangente inferior (superior) si los dos vértices adyacentes a  $V$  quedan por encima (debajo).

El siguiente algoritmo obtiene los vértices de L y R por los que pasa la tangente inferior (superior) a las dos envolventes convexas.

---

*Algoritmo para localizar la tangente inferior*

Sean  $L_E$  y  $R_E$  vectores con los vértices de las envolventes convexas.  
 $i \leftarrow$  índice del punto más a la derecha de  $L_E$  (mayor  $x$ )  
 $j \leftarrow$  índice del punto más a la izquierda  $R_E$  (menor  $x$ )  
 Sea  $\overline{L_i R_j}$  la línea que pasa por los vértices  $L_E[i]$  y  $R_E[j]$   
**repite**  
   **mientras**  $\overline{L_i R_j}$  no es inferior a los puntos adyacentes a  $L[i]$  **hacer**  
     incrementar  $i$   
   **mientras**  $\overline{L_i R_j}$  no es inferior a los puntos adyacentes a  $R[j]$  **hacer**  
     decrementar  $j$   
**hasta**  $i$  y  $j$  no cambien  
 La tangente inferior pasa por  $L[i]$  y  $R[j]$

---



---

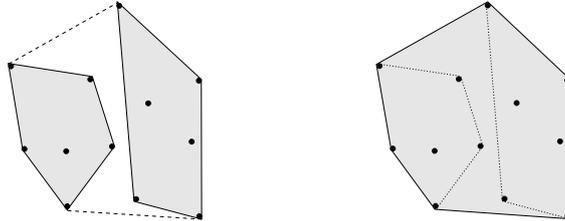
*Algoritmo para localizar la tangente superior*

Sean  $L_E$  y  $R_E$  vectores con los vértices de las envolventes convexas.  
 $i \leftarrow$  índice del punto más a la derecha de  $L_E$  (mayor  $x$ )  
 $j \leftarrow$  índice del punto más a la izquierda  $R_E$  (menor  $x$ )  
 Sea  $\overline{L_i R_j}$  la línea que pasa por los vértices  $L_E[i]$  y  $R_E[j]$   
**repite**  
   **mientras**  $\overline{L_i R_j}$  no es superior a los puntos adyacentes a  $L[i]$  **hacer**  
     decrementar  $i$   
   **mientras**  $\overline{L_i R_j}$  no es superior a los puntos adyacentes a  $R[j]$  **hacer**  
     incrementar  $j$   
**hasta**  $i$  y  $j$  no cambien  
 La tangente superior pasa por  $L[i]$  y  $R[j]$

---

Las dos tangentes dividen cada envolvente en dos trozos. Los segmentos que se encuentran a la derecha de la envolvente de L y los segmentos que se

encuentran a la izquierda de la envolvente de  $R$  son eliminados y sustituidos por las tangentes.



## 1.2. Tareas a realizar

Se pide diseñar e implementar los dos algoritmos comentados para resolver el problema:

- El “algoritmo específico”
- Un algoritmo donde se aborde el problema considerando el enfoque “Divide y Vencerás”. Demostrar que el algoritmo Divide y Vencerás anteriormente comentado permite obtener la solución a nuestro problema.
- Realizar el análisis de la eficiencia de los dos algoritmos, según los enfoques *teórico*, *empírico* e *híbrido*.

### 1.2.1. Cálculo de umbrales en algoritmos “Divide y Vencerás”

Uno de los aspectos fundamentales para lograr un buen algoritmo basado en la técnica “Divide y Vencerás” es la determinación del umbral. Sabemos que su valor óptimo no es fijo, y que depende de diversos factores: algoritmo base, implementación, casos estudiados, etc. En esta práctica se pretende realizar el cálculo del umbral óptimo para nuestro problema.

Vamos a estudiar la variante del algoritmo Divide y Vencerás que resulta al considerar como algoritmo base el algoritmo específico previamente desarrollado (algoritmo a) de la sección 1.2).

Pasos a seguir para calcular un valor adecuado del umbral:

- Cálculo teórico del valor del umbral. A partir de la expresión del tiempo de ejecución del algoritmo base y la expresión recurrente del tiempo de ejecución para el método recursivo, determine cuál es el tamaño del problema para el que ambos tiempos son iguales (suponiendo un sólo nivel de recursión). Este valor es el *umbral teórico*.

2. Calcule el tiempo exacto según un enfoque híbrido del tiempo de ejecución del algoritmo específico. Calcule ahora el umbral igualando esta función de tiempo con la expresión recurrente del método recursivo. Este es el *umbral óptimo*.
3. Seleccione distintos valores (inferiores y superiores al umbral óptimo) y obtenga los tiempos de ejecución reales para distintos casos del problema. Estos son los *umbrales de tanteo*.
4. Muestre en una gráfica comparativa la evolución del tiempo de ejecución del algoritmo para los distintos valores del umbral estudiados. Es decir, para cada selección distinta del umbral (teórico, óptimo y de tanteo) deberá dibujar una curva con los tiempos de los casos medidos empíricamente. Comente los resultados justificando cuál o cuáles de las variantes darían mejores resultados.

### 1.3. Evaluación de la práctica

Para su evaluación, el alumno deberá entregar una memoria y un disquete, que se ajustarán a las siguientes indicaciones:

#### 1.3.1. Estructura de la memoria

- La memoria tendrá una portada en la que aparezcan claramente: el título de la práctica, la titulación, el nombre y dirección de correo electrónico del alumno y el nombre de su profesor de prácticas.
- La primera parte de la memoria describirá la resolución del problema de la envolvente convexa de un conjunto de puntos. Debe contener las siguientes partes:
  - Definición del problema.
  - Diseño del algoritmo específico.
  - Listado de la implementación del algoritmo específico.
  - Análisis de la eficiencia del algoritmo específico: teórico, empírico e híbrido.
  - Diseño del algoritmo “Divide y Vencerás”.
  - Demostración de que el algoritmo diseñado resuelve el problema.
  - Implementación del algoritmo “Divide y Vencerás”.

- Análisis de la eficiencia del algoritmo “Divide y Vencerás”: teórico, empírico e híbrido.
- Detalle del cálculo del umbral: umbrales teórico, óptimo y de tanteo.

### 1.3.2. Disquete

Junto con la memoria se entregará un disquete con las implementaciones de los algoritmos indicados. Además, de todos los ficheros fuentes correspondientes, se incluirá un fichero **Makefile** que automatice la compilación.

El disquete irá etiquetado con el título de la práctica, y el nombre y grupo de prácticas del alumno.

Finalmente, el disquete se adjuntará dentro de un sobre pequeño pegado a una de las páginas de la memoria.

### 1.3.3. Otras observaciones

En la página <http://decsai.ugr.es/~jmbs/TA> puede encontrarse este guión en distintos formatos, además de información adicional sobre la práctica.

Fecha límite de entrega: **28 de noviembre de 2003** a las **14:00h**.

Se recuerda que la elaboración de las prácticas es de carácter individual.